



**ΕΠ.Α.Λ.
Α' ΟΜΑΔΑ**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** α) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 134.
β) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 138.
- B.** α) ΛΑΘΟΣ
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΣΩΣΤΟ
- Γ.** α) Β
β) Ε

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Έχουμε $\bar{x} = \frac{10+11+12+13+12+14+\omega+\omega+1+16+19}{10}$

$$\Leftrightarrow 13 = \frac{108+2\omega}{10} \Leftrightarrow 108+2\omega = 130 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\omega = 130 - 108 \Leftrightarrow 2\omega = 22 \Leftrightarrow \omega = 11.$$

Άρα οι τιμές είναι: 10, 11, 12, 13, 12, 14, 11, 12, 16, 19.

- β) i) Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι: 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 16, 19.
Η διάμεσος είναι το ημίθροισμα των μεσαίων τιμών δηλαδή:

$$\delta = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2}.$$

- ii) Το εύρος είναι: $R = 19 - 10 = 9$.
iii) Η επικρατούσα τιμή είναι το 12 με τη μεγαλύτερη συχνότητα 3.
iv) Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{(10-13)^2 + 2 \cdot (11-13)^2 + 3 \cdot (12-13)^2 + (13-13)^2 + (14-13)^2 + (16-13)^2 + (19-13)^2}{10} =$$

$$= \frac{9 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 + 9 + 36}{10} = \frac{66}{10} = 6,6.$$

Η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{6,6} \approx 2,57$ και $CV = \frac{2,57}{13} \cdot 100 \approx 19,7\%$.

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Περιορισμός: $x \neq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι: $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\beta) f'(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)'x - \eta\mu x(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \eta\mu x \cdot 1}{x^2} = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}.$$

$$\gamma) f''(x) = \left(\frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} \right)' = \frac{(x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)'x^2 - (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{[(x)'\sigma\upsilon\nu x + x(\sigma\upsilon\nu x)' - (\eta\mu x)']x^2 - (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)2x}{x^4} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)x^2 - (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^3\eta\mu x - 2x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x}{x^4} = \frac{x(-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x)}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x}{x^3}$$

Απόδειξη: $x f''(x) + 2 f'(x) + x f(x) =$

$$= x \frac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x}{x^3} + 2 \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} + x \frac{\eta\mu x}{x} =$$

$$= \frac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x}{x^2} + \frac{2x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x}{x^2} + \eta\mu x =$$

$$= \frac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x}{x^2} + \eta\mu x =$$

$$= \frac{-x^2\eta\mu x}{x^2} + \eta\mu x = -\eta\mu x + \eta\mu x = 0$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Έχουμε:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 2-1=1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1} = \frac{3}{1} = 3.$$

Άρα: $\alpha = 1$ και $\beta = 3$ και έτσι: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ με $x \in [-2, 2]$.

β) Έχουμε: $f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

Βρίσκουμε τα σημεία που μηδενίζεται η f' :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Τότε ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι:

x	-2	-1	1	2		
f'	+	0	-	0	+	
f	↗		↘		↗	
	τε	τμ	τε	τμ		

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-2, -1]$ και $[1, 2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει:

τοπικό ελάχιστο στο $x = -2$ το $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1$.

τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ το $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$.

τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$.

τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ το $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$.

γ) Το εμβαδόν είναι: $E = \int_{-1}^1 |f'(x)| dx = \int_{-1}^1 |3x^2 - 3| dx$.

Παρατηρούμε ότι $3x^2 - 3 < 0$ για $x \in [-1, 1]$ και έτσι:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 3) dx = -3 \int_{-1}^1 x^2 dx + 3 \int_{-1}^1 1 dx = -3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + 3 [x]_{-1}^1 = \\
 &= -[x^3]_{-1}^1 + 3[x]_{-1}^1 = -[1^3 - (-1)^3] + 3[1 - (-1)] = -(1+1) + 3(1+1) = \\
 &= -2 + 3 \cdot 2 = -2 + 6 = 4 \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$