



## ΕΠΑ.Λ. Β' ΟΜΑΔΑΣ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ &amp; ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. Απόδειξη (βλ. σχολικό σελ.31)
- B. α. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.149)  
β. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.66)
- Γ. α. Λάθος  
β. Λάθος  
γ. Σωστό  
δ. Λάθος  
ε. Σωστό

## ΘΕΜΑ 2

- A. Πρέπει  $x^2 + 1 \geq 0$ , το οποίο ισχύει για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  έτσι  $A = \mathbf{R}$
- B. α.  $f'(x) = \left( \ln(x^2 + 1) + x + \sqrt{\alpha + 15} \right)' = \frac{2x}{x^2 + 1} + 1 = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$
- β.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left[ \frac{f'(x) \cdot (x^2 + 1)}{x^2 - x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right) =$   
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{(x - 2) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{-1 + 1}{-1 - 2} = \frac{0}{-3} = 0.$
- Γ. Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με την  $C_f$ .  
 Αφού (ε)//(η) πρέπει:  $f'(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0^2 + 1} = 1 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = x_0^2 + 1 \Rightarrow$   
 $2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0.$   
 Αφού  $f(0) = \ln 1 + \sqrt{\alpha + 15} = \sqrt{\alpha + 15}$ , το σημείο επαφής είναι  $M(0, \sqrt{\alpha + 15})$   
 Έτσι (ε):  $y = f'(0) \cdot x + \beta$  δηλαδή (ε):  $y = x + \beta$   
 Όμως  $M \in (ε) \Rightarrow \sqrt{\alpha + 15} = 0 + \beta \Rightarrow \beta = \sqrt{\alpha + 15}$  έτσι (ε):  $y = x + \sqrt{\alpha + 15}.$
- Δ. για  $x_1 = 0$  έχω  $y_1 = \sqrt{\alpha + 15}$   
 για  $x_2 = 1$  έχω  $y_2 = 1 + \sqrt{\alpha + 15}$   
 για  $x_3 = 9$  έχω  $y_3 = 9 + \sqrt{\alpha + 15}$   
 για  $x_4 = 10$  έχω  $y_4 = 10 + \sqrt{\alpha + 15}$

Οι τιμές αυτές σε αύξουσα σειρά είναι:

$$\sqrt{\alpha+15}, \sqrt{\alpha+15}+1, \sqrt{\alpha+15}+9, \sqrt{\alpha+15}+10$$

$$\delta = \frac{\sqrt{\alpha+15}+1+\sqrt{\alpha+15}+9}{2} = \frac{2\sqrt{\alpha+15}+10}{2} = \sqrt{\alpha+15}+5$$

$$\text{Αφού } \delta = 50 \Rightarrow \sqrt{\alpha+15}+5 = 50 \Rightarrow \sqrt{\alpha+15} = 45 \Rightarrow \alpha+15 = 2025 \Rightarrow \alpha = 2010$$

### ΘΕΜΑ 3

- A.** Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος  $n$ , έτσι  $n = 50$ .
- B.** Τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες.

| Κλάσεις<br>[-) | $x_i$ | $v_i$    | $f_i$ | $f_i \%$ | $N_i$ | $F_i$ | $F_i \%$ |
|----------------|-------|----------|-------|----------|-------|-------|----------|
| 0 - 4          | 2     | 4        | 0,08  | 8        | 4     | 0,08  | 8        |
| 4 - 8          | 6     | 7        | 0,14  | 14       | 11    | 0,22  | 22       |
| 8 - 12         | 10    | 18       | 0,36  | 36       | 29    | 0,58  | 58       |
| 12 - 16        | 14    | 13       | 0,26  | 26       | 42    | 0,84  | 84       |
| 16 - 20        | 18    | 8        | 0,16  | 16       | 50    | 1     | 100      |
| Σύνολο         | -     | $n = 50$ | 1     | 100      |       |       |          |

$$\text{Αφού } n = 50 \Rightarrow N_4 + v_5 = 50 \Rightarrow 6v_2 + 8 = 50 \Rightarrow 6v_2 = 42 \Rightarrow v_2 = 7$$

$$N_4 = 42 \Rightarrow 4 + 7 + 18 + v_4 = 42 \Rightarrow v_4 = 13$$

- Γ. α.** **A:** «ο μαθητής έχει βαθμό από 10 έως 17» τότε

$$N(A) = \frac{1}{2} \cdot v_3 + v_4 + \frac{1}{4} \cdot v_5 = 9 + 13 + 2 = 24 \text{ οπότε}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{24}{50} = 0,48 \text{ ή } 48\%$$

- β.** **B:** «ο μαθητής έχει βαθμό κάτω από 10 ή τουλάχιστον 16»

$$N(B) = v_1 + v_2 + \frac{1}{2}v_3 + v_5 = 4 + 7 + 9 + 8 = 28. \text{ Έτσι}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{28}{50} = 0,56 \text{ ή } 56\%$$

### ΘΕΜΑ 4

- A.** Έχουμε:  $2P(2) = \frac{P(3)}{3} = P(6) = P(k) = \frac{P(\lambda)}{2} = \theta \in \mathbb{R}$

$$\text{Αφού } P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta + 2\theta + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(\mu) = \frac{1}{2} - 3\theta \quad (1)$$

$$\text{Όμως } P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(2) + P(3) + P(6) + P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) = 1 \Rightarrow^{(1)}$$

$$\frac{\theta}{2} + 3\theta + \theta + \theta + 2\theta + \frac{1}{2} - 3\theta = 1 \Rightarrow$$

$$4\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{Έτσι: } P(2) = \frac{1}{18}, P(3) = \frac{1}{3}, P(6) = \frac{1}{9}, P(\kappa) = \frac{1}{9}, P(\lambda) = \frac{2}{9}, P(\mu) = \frac{1}{6}$$

**B.**  $f'(x) = \lambda x^2 - 24x + 20$

$$\text{Αφού } \eta(\epsilon) // (\eta) \Rightarrow f'(-1) = 48 \Rightarrow \lambda + 44 = 48 \Rightarrow \lambda = 4$$

$$\text{Έτσι } f'(x) = 4x^2 - 24x + 20$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 20 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$$

|              |           |          |          |           |
|--------------|-----------|----------|----------|-----------|
| <b>x</b>     | $-\infty$ | <b>1</b> | <b>5</b> | $+\infty$ |
| <b>f'(x)</b> | +         | -        | -        | +         |
| <b>f(x)</b>  |           | ↗        | ↘        | ↗         |

Άρα  $\kappa = 1$  και  $\mu = 5$

$$\text{Έτσι } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

**Γ.** πρέπει  $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{2x - 3} - \sqrt{5} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ \sqrt{2x - 3} \neq \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ 2x - 3 \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ x \neq 4 \end{cases}$

και αφού  $x \in \Omega$  άρα:  $x = 2$  ή  $x = 3$  ή  $x = 5$  ή  $x = 6$

$$\text{έτσι } B = \{2, 3, 5, 6\}$$

**Δ.** Οι 4 παρατηρήσεις είναι τα  $\frac{4}{160} = \frac{1}{40} = 2,5\%$  του συνόλου των παρατηρήσεων.

$$\text{Έτσι αφού έχω κανονική κατανομή πρέπει: } \bar{x} + 2s = 20 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } R = \frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 6s = \frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 24s = 3\bar{x} \quad (2)$$

$$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 24s = 3(20 - 2s) \Rightarrow 24s = 60 - 6s \Rightarrow 30s = 60 \Rightarrow s = 2$$

$$\text{Έτσι από (1)} \Rightarrow \bar{x} + 4 = 20 \Rightarrow \bar{x} = 16$$

Παρατηρούμε ότι:  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{10}$ , έτσι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Προσθέτοντας τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό  $c$  σε όλες τις τιμές της μεταβλητής έχω:  $s' = s = 2$  και  $\bar{x}' = \bar{x} + c = 16 + c$ .

Για να είναι ομοιογενές το νέο δείγμα τιμών πρέπει:

$$CV' \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s'}{\bar{x}'} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{16 + c} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$20 \leq 16 + c \Rightarrow c \geq 4 \text{ και αφού } c \in \Omega \text{ έχω: } c = 4 \text{ ή } c = 5 \text{ ή } c = 6$$

$$\text{Έτσι } \Gamma = \{4, 5, 6\}$$

Ε. Έχουμε:  $A \cap \Gamma = \{4,5\}$

$$B - \Gamma = \{2,3\}$$

$$A \cup \Gamma = \{1,4,5,6\}$$

$$B \cup A' = \{2,3,5,6\}, \text{ αφού } A' = \{2,3,6\}$$

$$\text{Έτσι } P(A \cap \Gamma) = P(4) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

$$P(B - \Gamma) = P(2) + P(3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$$

$$P(A \cup \Gamma) = P(1) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

$$P(B \cup A') = P(2) + P(3) + P(5) + P(6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{12}{18}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2010