Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

γ) **i)** Λάθος **ii)** Λάθος **iii)** Σωστή **iv)** Λάθος

Θέμα 2

α) $\vec{a}\cdot\vec{\beta}=|\vec{a}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{a},\vec{\beta}\right)=2\cdot 3\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}=6\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3$

β) Ισχύει $2\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ άρα

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\left(3\vec{a}+\vec{\beta}\right)-\left(2\vec{a}-\vec{\beta}\right)=$$

$$=6\vec{a}+2\vec{\beta}-2\vec{a}+\vec{\beta}=4\vec{a}+3\vec{\beta}$$

γ) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2=\left|3\vec{a}+\vec{\beta}\right|^2=9\vec{a}^{\,2}+6\vec{a}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^{\,2}=$

$=9\cdot 4+6\cdot(-3)+9=39-18+9=27$ Άρα $\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

δ) Αν θ η γωνία των $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ και $\vec{a}$ τότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|\cdot|\vec{a}|}=\frac{\left(3\vec{a}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{a}}{3\sqrt{3}\cdot 2}=\frac{3\vec{a}^{\,2}+\vec{\beta}\cdot\vec{a}}{6\sqrt{3}}=\frac{3\cdot 4-3}{6\sqrt{3}}=\frac{9}{6\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{18}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$$

Επειδή $0\le\theta\le\pi$ είναι $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

Θέμα 3

α) $(\mathrm{AB})=\sqrt{(1+2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$ και $d(\mathrm{A},\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+3+a|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|6+a|}{\sqrt{10}}$

Είναι $\dfrac{|6+a|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\Leftrightarrow |6+a|=10\Leftrightarrow 6+a=10$ ή $6+a=-10\Leftrightarrow$

$a=4$ ή $a=-16$.

β) i) $\varepsilon: 3x+y+4=0$ οπότε $\Gamma(0,-4)$.

$\mathrm{E}=\dfrac{1}{2}\left|\det\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,-1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(-1,7)$

οπότε $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & 7\end{vmatrix}=-21+1=-20$

Άρα $\mathrm{E}=\dfrac{1}{2}|-20|=\dfrac{20}{2}=10$ τ.μ.

ii) Φέρνουμε $\mathrm{OH}\perp\varepsilon$.

Το σημείο Η έχει τη μικρότερη απόσταση από το Ο διότι για κάθε άλλο σημείο Μ της ε ισχύει $\mathrm{OM}>\mathrm{OH}$ (υποτείνουσα και κάθετη πλευρά στο τρίγωνο ΟΗΜ).

$\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\mathrm{OH}}=-1$ και $\lambda_\varepsilon=-3$ άρα $\lambda_{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}$

$\mathrm{OH}: y=\dfrac{1}{3}x$.

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων

$3x+y+4=0$ και $y=\dfrac{1}{3}x$ βρίσκουμε $x=-\dfrac{6}{5}$ και $y=-\dfrac{2}{5}$.

Άρα $\mathrm{H}\left(-\dfrac{6}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$ το σημείο της ε με τη μικρότερη απόσταση από το Ο.

Θέμα 4

α) $\mathrm{A}=\eta\mu\theta,\ \mathrm{B}=-\sigma\upsilon\nu\theta,\ \Gamma=-2$ και

$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+8=9>0$

Άρα είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{\eta\mu\theta}{2},\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\right)$ και ακτίνα

$\rho=\dfrac{\sqrt{9}}{2}=\dfrac{3}{2}$.

β) Αν $K(x,y)$ το κέντρο τότε $x=-\dfrac{\eta\mu\theta}{2}$ και $y=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2}$. Με ύψωσή τους στο τετράγωνο έχουμε $x^2=\dfrac{\eta\mu^2\theta}{4}$ και $y^2=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{4}$ οπότε με πρόσθεσή τους κατά μέλη προκύπτει $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$. Άρα το Κ κινείται στον κύκλο

$x^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

γ) Ισχύει $1+1+\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=2\Leftrightarrow\eta\mu\theta=-\sigma\upsilon\nu\theta$

Αν $\sigma\upsilon\nu\theta=0$ τότε $\eta\mu\theta=0$ αδύνατο.

Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$ επομένως

$\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=-1\Leftrightarrow\varepsilon\phi\theta=-1\Leftrightarrow\varepsilon\phi\theta=\varepsilon\phi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\theta=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$ πρέπει

$0\leq\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}<\pi\Leftrightarrow 0\leq\kappa-\dfrac{1}{4}<1\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\leq\kappa<\dfrac{5}{4}$. Άρα $\kappa=1$ οπότε

$\theta=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

δ) Από ερώτημα (β) το Κ ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ οπότε

$(\mathrm{OK})=\dfrac{1}{2}$.

Αν Α το σημείο του κύκλου C που βρίσκεται πιο κοντά στο Ο, και $\rho=\dfrac{3}{2}$ η ακτίνα του, ισχύουν:

$(\mathrm{OA})=\rho-(\mathrm{OK})$ και $(\mathrm{OB})=\rho+(\mathrm{OK})$

Άρα $(\mathrm{OA})=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$ και $(\mathrm{OB})=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$