



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1

α) Για τους ακέραιους α , β και γ να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$ τότε $\alpha|\gamma$.

ii) Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$ τότε $\alpha|(\beta + \gamma)$.

Μονάδες 10

β) i) Δίνονται τα σημεία E' και E του επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες E' και E ;

Μονάδες 5

ii) Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2p \cdot x$. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

Μονάδες 2

γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστή** ή **Λάθος**.

i) Αν $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ τότε ισχύει πάντα $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}|$.

ii) Το διάνυσμα $\vec{n} = (-A, B)$ είναι κάθετο στην ευθεία

$$\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0.$$

iii) Η εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής $x^2 - y^2 = a^2$ είναι $\frac{\gamma}{a} = \sqrt{2}$.

iv) Έστω οι ακέραιοι α, β, γ και ότι $\alpha|(\beta + \gamma)$

τότε κατ' ανάγκη $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$.

Μονάδες 8

Θέμα 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM διάμεσός του για το οποίο ισχύουν:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{\beta} \text{ και } \overrightarrow{AM} = 3\vec{a} + \vec{\beta}$$

α) Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 5

β) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{ΑΓ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των \vec{a} και $\vec{β}$.

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου $\overline{ΑΜ}$.

Μονάδες 7

δ) Να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overline{ΑΜ}$ και \vec{a} είναι ίση με $\frac{\pi}{6}$

Μονάδες 8

Θέμα 3

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + a = 0$ όπου $a \in \mathbb{R}$.

α) Αν η απόσταση του A από το B είναι ίση με την απόσταση του A από την ευθεία ε , να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 8

β) Για την τιμή $a = 4$ να βρείτε:

i) Το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία A , B και το σημείο Γ που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 8

ii) Ποιο σημείο της ευθείας ε έχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή O των αξόνων.

Μονάδες 9

Θέμα 4

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + (\eta\mu\theta)x - (\sigma\upsilon\nu\theta)y = 2$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι, όταν το θ μεταβάλλεται, τα κέντρα των κύκλων C κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\theta \in [0, \pi)$ αν είναι γνωστό ότι ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο $M(1, -1)$.

Μονάδες 6

δ) Έστω K το κέντρο του κύκλου C και A, B τα σημεία τομής του με την ευθεία OK (όπου O η αρχή των αξόνων). Να υπολογίσετε τις αποστάσεις (OA) και (OB) .

Μονάδες 7